I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Chlapci mezi sebou měnili známky, kuličky a míčky. Za 8 kuliček je 10 známek, za 4 míčky je 15 známek. Kolik kuliček je za jeden míček? (*M. Krejčová*)

Nápověda. Představte si, že máte např. 100 známek. Za co byste mohli některé z nich vyměnit?

Možné řešení. V obou srovnáních „hodnot“ jednotlivých předmětů se vyskytují známky, budeme je tedy považovat za jakési společné „platidlo“:

Jestliže za 8 kuliček je 10 známek, pak za trojnásobné množství kuliček musí být trojnásobné množství známek, tedy za 24 kuliček je 30 známek. Jestliže za 4 míčky je 15 známek, pak za dvojnásobné množství míčků musí být dvojnásobné množství známek, tedy za 8 míčků je 30 známek.

Máme-li 30 známek, můžeme je vyměnit buď za 24 kuliček, nebo za 8 míčků. Osm míčků má tedy stejnou hodnotu jako 24 kuliček, za jeden míček je osmkrát méně kuliček, tedy 3 kuličky.

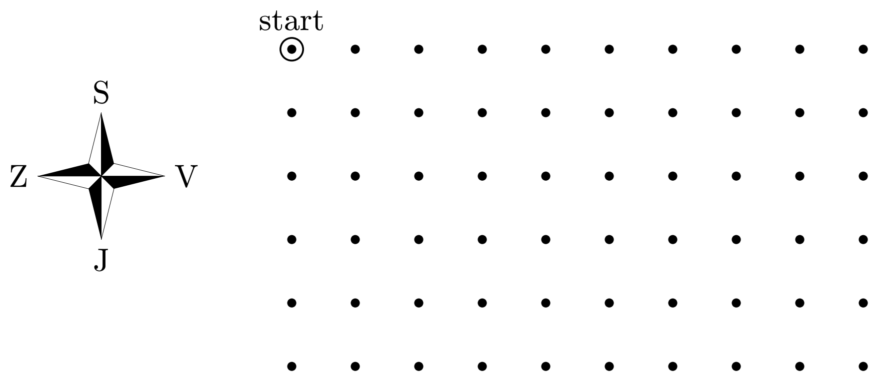
Poznámka. Ke stejnému výsledku se lze dobrat různými způsoby, např. takto:

Za 8 kuliček je 10 známek, tedy za 4 kuličky je 5 známek a za 12 kuliček je 15 známek. Za stejný počet známek lze vyměnit také 4 míčky, takže 4 míčky mají stejnou hodnotu jako 12 kuliček. Za jeden míček jsou 3 kuličky.

Z5–I–2

Žabí princ se zúčastnil skokanské soutěže, při které se skákalo po kamenech rozmístěných jako na obrázku. Bylo dovoleno skákat pouze na nejbližší kameny východním nebo jižním směrem. Každý skok na východ byl oceněn dvěma body, každý skok na jih byl oceněn pěti body. Žabí princ získal 14 bodů. Určete všechny možné cesty, kudy mohl skákat.

(*E. Patáková*)

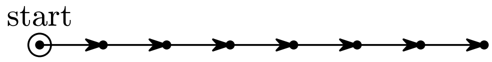


Nápověda. Zkoušejte skákat podle uvedených pravidel a vylučujte nevyhovující možnosti.

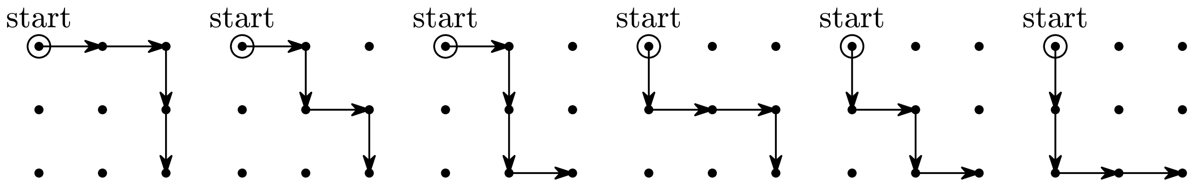
Možné řešení. V závislosti na počtu skoků, které mohl žabí princ udělat na jih, určíme počet skoků na východ tak, aby součet získaných bodů byl 14:

- na jih nemusel skočit ani jednou, 14 bodů lze získat sedmi skoky na východ;
- kdyby skočil na jih jednou, pak by musel několika skoky na východ získat $14 - 5 = 7$ bodů, což není možné (jenom skoky na východ by získal sudý počet bodů);
- kdyby skočil na jih dvakrát, pak by na východ musel skočit také dvakrát $(10+4 = 14)$;
- kdyby skočil na jih víckrát než dvakrát, pak by získal víc než 14 bodů.

Žabí princ tedy skákal buď sedmkrát na východ, nebo dvakrát na východ a dvakrát na jih. V prvním případě lze skákat jediným způsobem:



Ve druhém případě mohl skákat kteroukoli z následujících možností:



Z5–I–3

Z čísla 215 můžeme vytvořit čtyřmístné číslo tím, že mezi jeho číslice vepíšeme jakoukoli další číslici. Takto jsme vytvořili dvě čtyřmístná čísla, jejichž rozdíl byl 120. Jaká dvě čtyřmístná čísla to mohla být? Určete aspoň jedno řešení. (*L. Šimůnek*)

Nápověda. Je možné, aby nově vepsané číslice byly v obou případech na stejném místě?

Možné řešení. Nově vytvořené čtyřmístné číslo je buď typu $2{*}15$, nebo typu $21{*}5$ (hvězdičkou označujeme nově vepsané neznámé číslice). Kdyby byla obě nově vytvořená čísla stejného typu, byl by v prvním případě ($2{*}15$) rozdíl takových čísel násobkem 100, ve druhém případě ($21{*}5$) by byl násobkem 10, ovšem ne větším než 90. Rozdíl však má být 120, takže nově vytvořená čísla musí být různého typu.

V levém sloupci uvažujeme případ, kdy větší z čísel je číslo typu $2{*}15$, v pravém sloupci naopak:

$$\begin{array}{rcccc} & 2 & * & 1 & 5 \\ - & 2 & 1 & * & 5 \\ \hline & & 1 & 2 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcccc} & 2 & 1 & * & 5 \\ - & 2 & * & 1 & 5 \\ \hline & & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Oba případy dořešíme odzadu jako algebrogram, čímž obdržíme dvě možná řešení:

$$\begin{array}{rcccc} & 2 & \mathbf{3} & 1 & 5 \\ - & 2 & 1 & \mathbf{9} & 5 \\ \hline & & 1 & 2 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcccc} & 2 & 1 & \mathbf{3} & 5 \\ - & 2 & \mathbf{0} & 1 & 5 \\ \hline & & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Z5–I–4

Najděte největší číslo takové, že

- žádná číslice se v něm neopakuje,
- součin každých dvou číslic je lichý,
- součet všech číslic je sudý.

(*M. Mach*)

Nápověda. Z jakých číslic může sestávat číslo, pro které platí druhá podmínka ze zadání?

Možné řešení. Součin dvou čísel je lichý, právě když jsou obě čísla lichá. Proto hledané číslo může sestávat pouze z lichých číslic.

Součet několika lichých čísel je sudý, právě když je počet sčítanců sudý. Proto hledané číslo sestává ze sudého počtu číslic.

Lichých číslic je pět a číslice se nemají opakovat, proto každé číslo vyhovující uvedeným podmínkám je buď dvojmístné, nebo čtyřmístné. Největším z nich je číslo zapsané pomocí čtyř největších číslic seřazených sestupně, tedy číslo

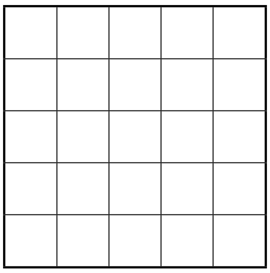
$$9753.$$

Z5–I–5

Na obrázku je čtverec rozdělený na 25 čtverečků. Vybarvěte čtverečky pěti barvami tak, aby platilo:

- každý čtvereček je vybarven jednou barvou,
- v žádném řádku ani v žádném sloupci nejsou dva čtverečky stejné barvy,
- na žádné z obou úhlopříček nejsou dva čtverečky stejné barvy,
- žádné dva stejně barevné čtverečky se nedotýkají stranou ani vrcholem.

(*M. Petrová*)



Nápověda. Zkuste jako první vybarvit prostřední čtvereček.

Možné řešení. Ze zadání víme, že v každém řádku, v každém sloupci a na každé úhlopříčce bude každá z pěti barev právě jednou. Celkem tedy bude každá z pěti barev v celém čtverci zastoupena právě pětkrát. Navíc musíme mít na paměti ještě podmínku, že dva čtverečky stejné barvy nesmí mít společný ani vrchol.

Prostřední čtvereček leží na obou úhlopříčkách, takže po jeho vybarvení budeme moci uplatnit podmínky na co možná největší počet ostatních čtverečků. Začneme tím, že prostřední čtvereček vybarvíme např. modře (M) a všechna políčka, která nemohou být vybarvena stejnou barvou, označíme křížkem:

×		×		×
	×	×	×	
×	×	**M**	×	×
	×	×	×	
×		×		×

V každém řádku a v každém sloupci, kde ještě není modrý čtvereček, si můžeme vybrat ze dvou možností. Budeme postupovat po řádcích odshora dolů — v každém řádku vybarvíme jedno políčko a označíme křížkem všechna ostatní políčka ve čtverci, která nemohou být modrá. Takto postupně dostáváme:

×	**M**	×	×	×
×	×	×	×	
×	×	M	×	×
	×	×	×	
×	×	×		×

×	M	×	×	×
×	×	×	×	**M**
×	×	M	×	×
	×	×	×	×
×	×	×		×

×	M	×	×	×
×	×	×	×	M
×	×	M	×	×
M	×	×	×	×
×	×	×		×

×	M	×	×	×
×	×	×	×	M
×	×	M	×	×
M	×	×	×	×
×	×	×	**M**	×

Budeme pokračovat ve vybarvovaní např. zelenou barvou (Z). Ze stejného důvodu jako výše chceme začít s takovým políčkem, jehož vybarvení ovlivní co možná nejvíc ostatních políček. Proto volíme nějaké políčko blízko středu čtverce, např. druhé políčko na třetím řádku:

	M			
×	×	×		M
×	**Z**	M	×	×
M	×	×		
	×		M	

Dále postupujeme obdobně jako v předchozím případě, akorát dáváme přednost těm řádkům, na kterých se jeví jediná možnost vybarvení:

	M	×	×	×
×	×	×	**Z**	M
×	Z	M	×	×
M	×	×	×	
×	×		M	

Z	M	×	×	×
×	×	×	Z	M
×	Z	M	×	×
M	×	×	×	
×	×		M	×

Z	M	×	×	×
×	×	×	Z	M
×	Z	M	×	×
M	×	×	×	**Z**
×	×	**Z**	M	×

Podle stejných zásad pokračujeme s další barvou, např. červenou (Č). Začínáme např. na čtvrtém políčku ve třetím řádku:

Z	M		×	
		×	Z	M
×	Z	M	**Č**	×
M		×	×	Z
		Z	M	

Z	M		×	×
	×	×	Z	M
×	Z	M	Č	×
M	**Č**	×	×	Z
×	×	Z	M	

Z	M	**Č**	×	×
Č	×	×	Z	M
×	Z	M	Č	×
M	Č	×	×	Z
×	×	Z	M	**Č**

Jako další vybarvíme např. druhý čtvereček na druhém řádku, a to např. hnědou barvou (H):

Z	M	Č		
Č	**H**	×	Z	M
×	Z	M	Č	
M	Č		×	Z
	×	Z	M	Č

Z	M	Č		×
Č	H	×	Z	M
×	Z	M	Č	**H**
M	Č		×	Z
	×	Z	M	Č

Z	M	Č	**H**	×
Č	H	×	Z	M
×	Z	M	Č	H
M	Č	**H**	×	Z
H	×	Z	M	Č

Nyní vidíme, že i poslední nevybarvená políčka splňují všechny podmínky ze zadání. Pokud je tedy vybarvíme nějakou další barvou, např. růžovou (R), dostáváme jedno z možných řešení:

Z	M	Č	H	R
Č	H	R	Z	M
R	Z	M	Č	H
M	Č	H	R	Z
H	R	Z	M	Č

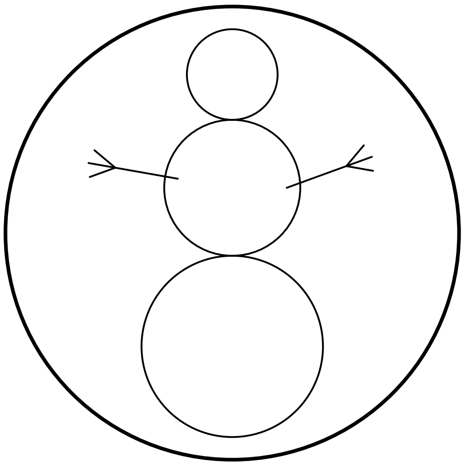
Poznámka. Ačkoli to z předchozího popisu řešení není úplně zřejmé, ve skutečnosti má tato úloha pouze dvě řešení (až na volbu použitých barev), a ta jsou navíc zrcadlově převrácená. Pokuste se prozkoumat, proč tomu tak je.

Z5–I–6

Na medaili, která má tvar kruhu o průměru 20 cm, je narýsován sněhulák tak, že jsou splněny následující požadavky:

- sněhulák je složen ze tří kruhů jako na obrázku,
- mezera nad sněhulákem je stejná jako pod ním,
- průměry všech kruhů vyjádřené v cm jsou celočíselné,
- průměr každého většího kruhu je o 2 cm větší než průměr kruhu předcházejícího.

Určete výšku co největšího sněhuláka s uvedenými vlastnostmi. (*L. Dedková*)



Nápověda. O kolik cm je průměr největšího kruhu větší než průměr nejmenšího?

Možné řešení. Nejmenší je horní kruh představující hlavu sněhuláka. Prostřední kruh je o 2 cm větší než nejmenší kruh a spodní kruh je o 4 cm větší než nejmenší kruh. Celková výška sněhuláka je tedy rovna třem průměrům nejmenšího kruhu a k tomu 6 cm.

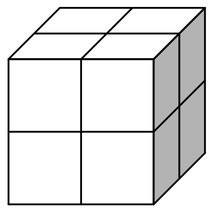
Aby byla nad i pod sněhulákem ještě nějaká mezera, musí být výška sněhuláka menší než 20 cm. To znamená, že tři průměry nejmenšího kruhu musí být menší než 14 cm, takže průměr nejmenšího kruhu musí být menší nebo roven 4 cm (14 : 3 je 4, zbytek 2). Největší sněhulák se všemi požadovanými vlastnostmi je tedy vysoký

$$3 \cdot 4 + 6 = 18\,(\mathrm{cm}).$$

I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Erika a Petr dostali kostku, která měla každou stěnu rozdělenou na čtyři stejné čtverce, viz obrázek. Petr tvrdil, že lze do všech čtverců vepsat čísla 1 nebo 2 tak, aby na každé ze šesti stěn byl jiný součet. Erika naopak tvrdila, že to možné není. Rozhodněte, kdo z nich měl pravdu. (*E. Novotná*)



Nápověda. Jaký je největší možný součet na jedné stěně?

Možné řešení. Nejmenší možný součet, který lze na stěně kostky vytvořit, je 4, a to když je ve všech čtvercích napsáno číslo 1. Naopak, největší možný součet je 8, a to když je všude napsáno číslo 2. Na jednotlivých stěnách kostky mohou být pouze součty mezi těmito dvěma hodnotami, tzn. 4, 5, 6, 7 nebo 8.

Uvedeným způsobem je tedy možné vytvořit nejvýše pět různých součtů, avšak kostka má stěn šest. Ať už jsou čísla napsána jakkoli, musí se aspoň jeden součet opakovat. Pravdu proto měla Erika.

Z6–I–2

Janeček a Walter sbírali autíčka. Walter měl autíčka srovnána ve skříňce ve třech poličkách. Nejvíce autíček stálo na horní poličce, na prostřední jich bylo o tři méně než na horní a na spodní poličce jich bylo o tři méně než na prostřední. Přitom na jedné z těchto poliček bylo 15 autíček. Když si Janeček sbírku prohlédl, řekl Walterovi:

„Myslel jsem si, že když mám více než 20 autíček, tak jich mám mnoho. Teď ale vidím, že ty máš dvakrát více autíček než já!“

Kolik autíček měl ve svojí sbírce Janeček? (*L. Hozová*)

Nápověda. Mohlo stát 15 Walterových autíček na horní poličce?

Možné řešení. Ze zadání nevíme, na které poličce bylo oněch 15 Walterových autíček. Proto musíme rozlišovat následující tři případy:

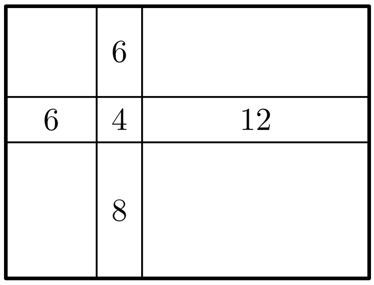
a) Kdyby bylo 15 autíček na horní poličce, bylo by na prostřední 12 a na dolní 9, tj. dohromady $15 + 12 + 9 = 36$. Janeček by pak měl 18 autíček, což je méně než 20.
b) Kdyby bylo 15 autíček na prostřední poličce, bylo by na horní 18 a na dolní 12, tj. dohromady $18 + 15 + 12 = 45$. Tento součet je však lichý, což není možné (Janeček by měl mít 22,5 autíčka).
c) Kdyby bylo 15 autíček na dolní poličce, bylo by na horní 21 a na prostřední 18, tj. dohromady $21 + 18 + 15 = 54$. Janeček by pak měl 27 autíček.

Jediný případ, který není ve sporu s žádnou uvedenou informací, je c). Janeček měl ve své sbírce 27 autíček.

Z6–I–3

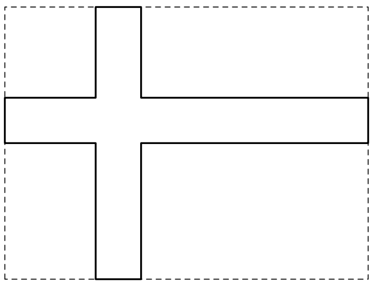
Pan Květák má obdélníkovou zahradu rozdělenou na 9 pravoúhelníkových záhonů, viz obrázek. U pěti záhonů jsou zapsány velikosti jejich obvodů v metrech.

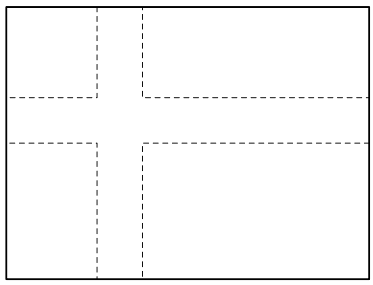
Určete obvod celé zahrady pana Květáka. (*L. Hozová*)



Nápověda. Pokuste se složit obvod celé zahrady z úseček, které ohraničují záhony, jejichž obvody známe.

Možné řešení. Pro každý ze záhonů se známými obvody platí, že jeho strany jsou shodné (příp. dokonce splývají) s úsečkami vyznačenými na obvodu celé zahrady. Navíc obvod celé zahrady může být složen právě z těchto úseček, avšak určitě ne ze všech — např. je možné použít všechny úsečky kromě těch, které ohraničují záhon s obvodem 4 metry.





To znamená, že obvod celé zahrady může být vyjádřen pomocí daných obvodů takto:

$$6 + 6 + 8 + 12 - 4 = 28.$$

Zahrada pana Květáka má tedy obvod 28 metrů.

Poznámka. Pokud předpokládáme, že prostřední záhon je čtvercový, potom je snadné určit délky všech stran všech záhonů a odtud spočítat obvod celé zahrady. Tento předpoklad však není přímo zmíněn v zadání, proto by se s ním pracovat nemělo. Řešení založená na tomto předpokladu hodnoťte nejlépe stupněm „dobře“.

Z6–I–4

Katka, Barča a Adélka se dohadovaly, které dvojmístné číslo je nejkrásnější. Katka říkala, že to je to její, protože je dělitelné čtyřmi, a když ho napíše pozpátku, dostane jiné dvojmístné číslo, které je také dělitelné čtyřmi. Barča tvrdila, že je to určitě to její, protože jedna z jeho číslic je násobkem druhé. Adélka o svém oblíbeném čísle prozradila, že jej lze rozložit na součin čtyř prvočísel.

Nakonec kamarádky zjistily, že mluví všechny o témž čísle. Určete, které číslo to bylo.

(*L. Dedková*)

Nápověda. Hledejte dvojmístná čísla, která mají všechny zmiňované vlastnosti.

Možné řešení. Podle Katky má být hledané číslo dělitelné čtyřmi, je to tedy jedno z následujících čísel:

$$12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28,\ 32,\ 36,\ 40,\ 44,\ 48,\ 52,\ 56,\ 60,\ 64,\ 68,\ 72,\ 76,\ 80,\ 84,\ 88,\ 92,\ 96.$$

Současně má platit, že toto číslo napsané pozpátku dává jiné dvojmístné číslo dělitelné čtyřmi. Této podmínce vyhovují pouze čísla

$$48,\ 84.$$

(Čísla 40, 44, 80 a 88 napsaná pozpátku jsou také dělitelná čtyřmi, ale 44 a 88 nedávají jiná čísla, 40 a 80 nedávají dvojmístná čísla.)

Podle Barči je hledané číslo takové, že jedna jeho číslice je násobkem druhé. Této podmínce vyhovuje jak 48, tak 84.

Podle Adélky lze hledané číslo rozložit na součin čtyř prvočísel. Prvočíselný rozklad obou zatím vyhovujících čísel je

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3, \quad 84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

Číslo 48 má ve svém rozkladu pět prvočísel, číslo 84 čtyři prvočísla. Kamarádky mluvily o čísle 84.

Z6–I–5

Určete, kolik různých řešení má následující algebrogram. Každé písmeno odpovídá jedné číslici od 0 do 5, různá písmena odpovídají různým číslicím, stejná stejným.

$$\begin{array}{r} KOSA \\ \underline{SAKO} \\ BABA \end{array}$$

(*K. Pazourek*)

Nápověda. Co můžete říct o číslicích odpovídajících písmenům A a O?

Možné řešení. Pěti různým písmenům máme přiřadit různé číslice od 0 do 5. To zejména znamená, že v uvedeném algebrogramu nemusíme uvažovat přechod přes desítku (součet největších dvou povolených číslic je $4 + 5 = 9$).

Nejprve si všimneme druhého a čtvrtého sloupce: Abychom dostali $A + O = A$, musí nutně být

$$O = 0.$$

Z prvního a třetího sloupce vidíme, že $K + S = B$. Přitom K a S odpovídají různým číslicím od 1 do 5 (nula už je obsazená) a jejich součet má být roven jiné číslici od 1 do 5. Vypíšeme systematicky všechny možnosti:

K	1	1	1	2	2	3	4	3
S	2	3	4	3	1	1	1	2
B	3	4	5	5	3	4	5	5

Máme celkem 8 možností, jak může vypadat trojice S, K, B. Ze šesti možných číslic jsou v tuto chvíli obsazeny čtyři, a to 8 různými způsoby. Písmeno A pak může odpovídat kterékoli ze zbývajících dvou číslic. Počet všech možných řešení algebrogramu je tedy

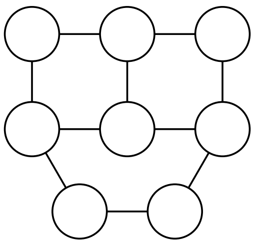
$$8 \cdot 2 = 16.$$

Z6–I–6

Skauti na výletě hráli hru. V lese bylo rozmístěno 8 stanovišť propojených provázky tak, jako na následujícím obrázku. Na každém stanovišti se vydávalo jedno písmenko, popřípadě pomlčka. Stanoviště je možné podle provázků proběhnout tak, že získaná písmena tvoří řetězec

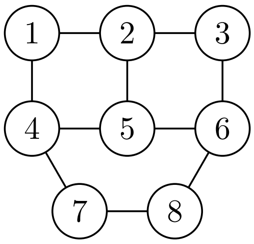
ANANAS–KOKOS–MANGO.

Přiřaďte jednotlivým stanovištím odpovídající znaky. (*M. Mach*)



Nápověda. Může se některé z písmen objevovat na více stanovištích?

Možné řešení. Nejprve se ujistíme, že ve výsledném řetězci se opakuje právě tolik znaků, kolik je stanovišť, tj. osm. Kvůli snadnějšímu vyjadřování si jednotlivá stanoviště očíslujeme:



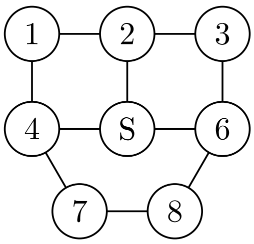
Některá stanoviště sousedí se dvěma (1, 3, 7, 8), jiná se třemi dalšími stanovišti (2, 4, 5, 6). Jistou nápovědu o rozmístění znaků na stanovištích získáme, když pro každý znak v řetězci zjistíme, s kolika dalšími znaky sousedí. Se dvěma znaky sousedí čtyři znaky:

- N sousedí s A a G,
- K sousedí s – a O,
- M sousedí s – a A,
- G sousedí s N a O.

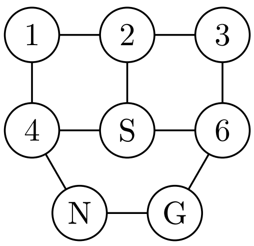
Se třemi znaky sousedí zbylé čtyři znaky:

- A sousedí s N, S a M,
- S sousedí s A, – a O,
- O sousedí s K, S a G,
- – sousedí s S, K a M.

Odtud plyne, že žádný ze znaků A, S, O, – nemůže být na žádném ze stanovišť 1, 3, 7, 8, tyto znaky tedy musí být nějak rozmístěny na stanovištích 2, 4, 5, 6. Mezi těmito stanovišti vidíme, že pouze stanoviště 5 sousedí se všemi ostatními. Stejnou vlastnost mezi znaky A, S, O, – má pouze písmeno S. Písmeno S se proto určitě vydávalo na 5. stanovišti.

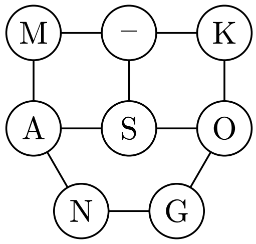


Znaky N, K, M, G jsou nějak rozmístěny na stanovištích 1, 3, 7, 8. Mezi těmito stanovišti spolu navzájem sousedí pouze stanoviště 7 a 8. Stejnou vlastnost mezi písmeny N, K, M, G mají pouze písmena N a G. Proto se písmeno N vydávalo na 7. stanovišti a G na 8. stanovišti, nebo naopak.



Na stanovišti 4 může být jedině znak, který sousedí s S a současně s N; jedinou možností je A. Z podobných důvodů může být na stanovišti 6 jedině O. Poslední neobsazené stanoviště ze skupiny 2, 4, 5, 6 je nyní 2, na které zbývá jediný možný znak, a to –.

Na poslední dvě stanoviště 1 a 3 zbývají písmena M a K. Jejich jediné možné umístění je opět určeno podle sousedů (M sousedí s A, K sousedí s O):



Vidíme, že v tomto přiřazení skutečně platí všechny výše uvedené sousedské vztahy. Nyní je nutné ukázat, že stanoviště je možné podle provázků proběhnout tak, že získaná písmena tvoří onen řetězec. Řešením je následující cesta:

$$4\ 7\ 4\ 7\ 4\ 5\ 2\ 3\ 6\ 3\ 6\ 5\ 2\ 1\ 4\ 7\ 8\ 6.$$

Poznámka. Až na volbu pořadí písmen N a G na 7. a 8. stanovišti bylo přiřazení ostatních znaků ke stanovištím určeno jednoznačně. Úloha má tedy dvě řešení, která jsou osově souměrná.

Značnou část uvedeného řešení lze samozřejmě nahradit zkoušením; podstatné je najít nějaké přiřazení znaků stanovištím a popsat odpovídající cestu. V takovém případě však nerozpoznáme, že víc řešení vlastně není.

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Libor, Martin a jejich kamarádka Erika šetří na hračku. Libor a Martin přispěli do společné pokladničky stejným množstvím peněz, Erika přispěla jinou částkou. Kdyby Erika přispěla jen třetinou z toho, co do pokladničky dodala, celkově by měli polovinu z částky, která je v pokladničce nyní.

Kolikrát víc peněz do pokladničky dodala Erika než Libor? (*E. Patáková*)

Nápověda. Jakou část celkové částky tvoří dvě třetiny Eričina příspěvku?

Možné řešení. Ze zadání vyplývá, že součet příspěvků Libora a Martina a třetiny příspěvku Eriky tvoří polovinu celkové částky. To znamená, že dvě třetiny Eričina příspěvku tvoří druhou polovinu celkové částky. Odtud jedna třetina Eričina příspěvku je rovna polovině z poloviny — tedy čtvrtině — celkové částky. Erika proto přispěla třemi čtvrtinami a Martin společně s Liborem čtvrtinou celkové částky. Protože Martin a Libor přispěli stejně, každý z nich dodal polovinu ze čtvrtiny — tedy osminu — celkové částky.

Erika dodala tři čtvrtiny a Libor jednu osminu celkové částky. Protože tři čtvrtiny jsou totéž jako šest osmin, vidíme, že Erika dodala do společné pokladničky šestkrát více peněz než Libor.

Poznámky. Příspěvek Libora, Martina a Eriky označíme postupně l, m a e, celkovou částku označíme $c = l + m + e$. Při tomto značení lze předchozí řešení zapsat následujícím způsobem:

$$l + m + \frac{e}{3} = \frac{2}{3}e = \frac{c}{2},$$
$$\frac{e}{3} = \frac{c}{4} \quad \text{neboli} \quad e = \frac{3}{4}c.$$

Odtud plyne, že

$$l + m = \frac{c}{4}.$$

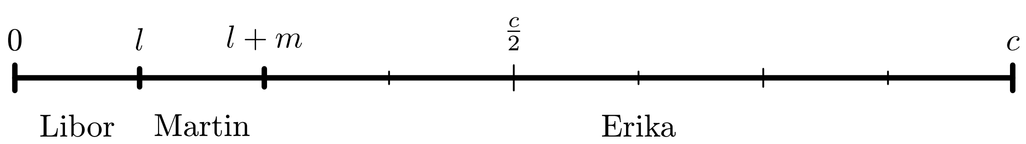
Protože $l = m$, dostáváme

$$2l = \frac{c}{4} \quad \text{neboli} \quad l = \frac{c}{8}.$$

Celkem tedy vidíme, že

$$e = \frac{3}{4}c = \frac{6}{8}c = 6\,l.$$

Pomocné grafické znázornění je na následujícím obrázku.



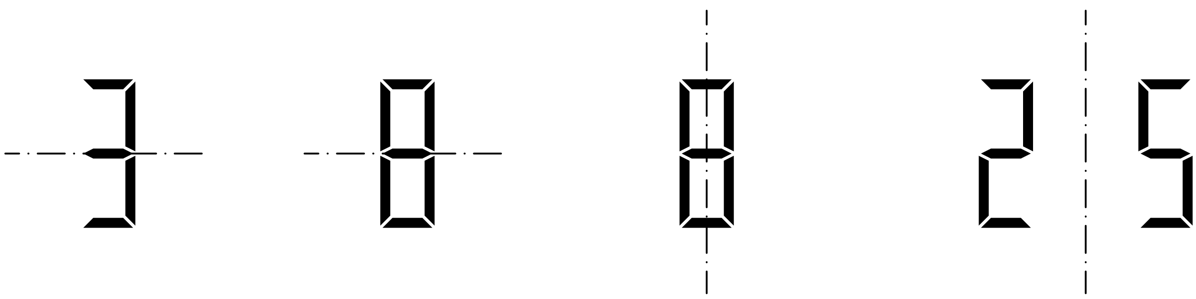
Z7–I–2

Lenka se bavila tím, že vyťukávala na kalkulačce čísla. Používala pouze číslice od 2 do 9 a brzy si všimla, že některé zápisy byly osově souměrné. Určete počet všech nejvýše trojmístných čísel s uvedenými vlastnostmi. (*L. Dedková*)

Nápověda. Určete zvlášť počet čísel souměrných podle vodorovné, resp. podle svislé osy.

Možné řešení. Jediné číslice od 2 do 9, které jsou souměrné podle vodorovné osy, jsou číslice 3 a 8. Všechna nejvýše trojmístná čísla složená výhradně z těchto číslic tak odpovídají zadání. Takových čísel je celkem 14:

- 3, 8,
- 33, 88, 38, 83
- 333, 888, 338, 383, 388, 833, 838, 883.



Podle svislé osy je souměrná jedině číslice 8. Navíc jsou podle svislé osy vzájemně souměrné číslice 2 a 5. Z těchto tří číslic lze sestavit 7 nejvýše trojmístných čísel vyhovujících zadání:

- 8,
- 88, 25, 52,
- 888, 285, 582.

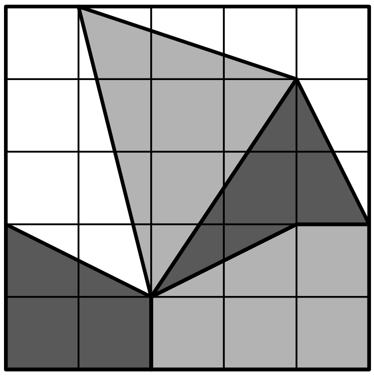
Čísla 8, 88 a 888 jsou souměrná jak podle svislé, tak podle vodorovné osy, do celkového počtu čísel odpovídajících zadání je tedy počítáme pouze jednou: Počet nejvýše trojmístných osově souměrných čísel je

$$14 + 7 - 3 = 18.$$

Z7–I–3

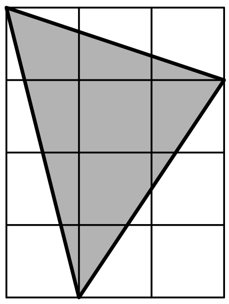
Podle projektu bude dno bazénu vyskládáno kamínky tří barev tak, jak ukazuje obrázek (dno je navíc rozděleno na 25 shodných pomocných čtverců). Cena kamínků na jednotku plochy se u jednotlivých barev liší. Projektant počítal cenu kamínků použitých na takto vyskládané dno a k jeho překvapení se za každý druh kamínků utratí stejná částka. Dále spočítal, že kdyby celou plochu vyskládal těmi nejlevnějšími kamínky, byly by náklady 17 000 Kč.

Zjistěte, jaké by byly náklady, kdyby celé dno nechal vyskládat těmi nejdražšími kamínky. (*L. Šimůnek*)



Nápověda. Vyjádřete obsahy jednotlivých jednobarevných ploch.

Možné řešení. Obsah každého jednobarevného obrazce lze spočítat pomocí sčítání a odčítání obsahů vhodných pravoúhelníků a pravoúhlých trojúhelníků.



Pro příklad uvádíme výpočet obsahu světle šedého trojúhelníku, jednotkou je obsah pomocného čtverce:

$$3 \cdot 4 - \frac{1 \cdot 4}{2} - \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{3 \cdot 1}{2} = 12 - 2 - 3 - 1{,}5 = 5{,}5.$$

Obsahy jednotlivých jednobarevných ploch jsou:

- bílá: $5 + 3{,}5 = 8{,}5$,
- světle šedá: $5{,}5 + 5 = 10{,}5$,
- tmavě šedá: $3 + 3 = 6$.

Celková cena kamínků použitých v každé z těchto tří ploch byla podle zadání stejná, nejlevnější materiál je tedy světle šedý a nejdražší tmavě šedý.

Vyskládání celé plochy, tj. všech 25 pomocných čtverců, kamínky nejlevnější světle šedé barvy by stálo 17 000 Kč. Jeden čtverec by tudíž stál

$$17\,000 : 25 = 680 \text{ (Kč)}.$$

Plocha, která byla skutečně vyskládaná světle šedě, tak stála

$$10{,}5 \cdot 680 = 7\,140 \text{ (Kč)}.$$

Podle zadání na stejnou částku vyšel i materiál na vyskládání 6 čtverců kamínky nejdražší tmavě šedé barvy. Jeden takový čtverec vyjde na

$$7\,140 : 6 = 1\,190 \text{ (Kč)}.$$

Kdyby bylo těmito kamínky vyskládáno celé dno bazénu, náklad na materiál by byl

$$25 \cdot 1\,190 = 29\,750 \text{ (Kč)}.$$

Poznámka. Závěrečné počítání v uvedeném řešení je možné zkrátit následovně:

Podle zadání lze za stejnou částku pořídit 6 tmavě šedých a 10,5 světle šedých čtverců, tj. 1,75krát více světle šedých čtverců než tmavě šedých ($10{,}5 : 6 = 1{,}75$). Tmavě šedý materiál je tedy 1,75krát dražší než světle šedý. Pokrytí celého dna tmavě šedou barvou by proto stálo

$$1{,}75 \cdot 17\,000 = 29\,750 \text{ (Kč)}.$$

Z7–I–4

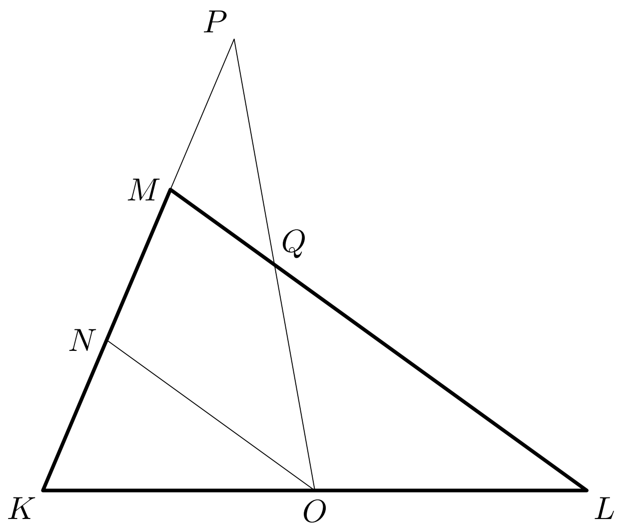
Body N, O, P a Q jsou vzhledem k trojúhelníku KLM zadány následujícím způsobem:

- body N a O jsou popořadě středy stran KM a KL,
- vrchol M je středem úsečky NP,
- bod Q je průsečíkem přímek LM a OP.

Určete, jaký je poměr délek úseček MQ a ML. (*L. Hozová*)

Nápověda. Připomeňte si definici a vlastnosti středních příček v trojúhelníku.

Možné řešení. Nejprve podle zadání určíme polohu bodů N, O, P a Q vzhledem k obecnému trojúhelníku KLM, viz obrázek.



Body N a O jsou středy úseček KM a KL. Proto je úsečka NO střední příčkou v trojúhelníku KLM, která je rovnoběžná se stranou ML. Platí tedy $|ML| = 2|NO|$.

Bod M je středem úsečky NP a úsečka MQ je rovnoběžná s NO. Proto je úsečka MQ střední příčkou v trojúhelníku NPO a platí $|NO| = 2|MQ|$.

Celkem zjišťujeme, že platí

$$|ML| = 2|NO| = 4|MQ|,$$

neboli, že poměr délek úseček MQ a ML je roven

$$|MQ| : |ML| = 1 : 4.$$

Z7–I–5

Na starém hradě bydlí drak a vězní tam princeznu. Honza šel princeznu osvobodit, na hradě objevil troje vrata s následujícími nápisy.

I: „Sluj za vraty III je prázdná.“

II: „Princezna je v prostoru za vraty I.“

III: „Pozor! Drak je ve sluji za vraty II.“

Dobrá víla Honzovi prozradila, že na vratech, za kterými je princezna, je nápis pravdivý, u draka nepravdivý a na vratech prázdné sluje může být napsána pravda i lež.

Honza má na osvobození princezny pouze jeden pokus. Která vrata má otevřít?

(*M. Volfová*)

Nápověda. Vžijte se do Honzovy situace a rozhodněte, za kterými vraty princezna být nemůže.

Možné řešení. Podle informací od dobré víly víme, že nápis na vratech, za nimiž je princezna, je pravdivý. Proto princezna nemůže být za vraty II, a je tedy buď za vraty I, nebo III.

Kdyby princezna byla za vraty I, byla by pravda, že sluj za vraty III je prázdná. V takovém případě by drak musel být za vraty II a na těchto vratech by tak měl být nepravdivý nápis. Nápis ale tvrdí, že princezna je za vraty I, což by ovšem byla pravda. Proto princezna nemůže být ani za vraty I.

Princezna je tedy ukrytá v prostoru za vraty III. Podle nápisu na těchto vratech víme, že drak je za vraty II a odpovídající nápis je skutečně nepravdivý. Sluj za vraty I je prázdná a nápis na oněch vratech proto může být jakýkoli.

Pokud to Honza s princeznou myslí opravdu vážně, měl by otevřít vrata III.

Poznámka. Pokud nevíme, jak začít, vždy je možné vypsat všechny možnosti rozmístění draka a princezny do jednotlivých slují (celkem 6 možností) a v každém z těchto případů zkontrolovat, zda nápisy na vratech souhlasí s nápovědou od dobré víly. Jako jediný bezesporný případ vyjde ten, který jsme právě vyvodili.

Z7–I–6

Matěj má dvě kartičky, na každou z nich napsal jedno dvojmístné číslo. Zařadí-li menší číslo za větší, dostane čtyřmístné číslo, které je dělitelné čtyřmi a devíti. Zařadí-li naopak větší číslo za menší, dostane čtyřmístné číslo, které je dělitelné pěti a šesti.

Kolik dvojic kartiček mohl Matěj vyrobit tak, aby platily výše uvedené vlastnosti? Určete všechny možnosti. (*M. Petrová*)

Nápověda. Co lze říct o dělitelnosti čísel napsaných na jednotlivých kartičkách?

Možné řešení. Větší číslo si označíme AB, menší cd. První podmínka v zadání říká, že:

- Číslo $ABcd$ je dělitelné čtyřmi, takže poslední dvojčíslí cd je dělitelné čtyřmi.
- Číslo $ABcd$ je dělitelné devíti, což znamená, že ciferný součet $A+B+c+d$ je dělitelný devíti.

Z druhé podmínky víme, že:

- Číslo $cdAB$ je dělitelné pěti, takže číslice B je 0 nebo 5.
- Číslo $cdAB$ je dělitelné šesti, tudíž je zároveň dělitelné třemi a dvěma. Aby bylo dělitelné dvěma, musí být číslice B sudá, což spolu s předchozím důsledkem znamená, že $B = 0$. (Aby bylo $cdAB$ dělitelné třemi, musí být ciferný součet $c + d + A + B$ dělitelný třemi. Z první podmínky však víme, že je tento součet dělitelný devíti, což je silnější požadavek.)

Celkem tak dostáváme, že větší číslo AB je dělitelné desíti, menší číslo cd je dělitelné čtyřmi a ciferný součet $A + B + c + d = A + c + d$ je dělitelný devíti.

Než začneme prověřovat všechny možnosti vyhovující uvedeným podmínkám, můžeme si všimnout následujícího: Největší dvojmístné číslo AB dělitelné desíti je 90. Největší dvojmístné číslo cd dělitelné čtyřmi a menší než AB je 88. Pro libovolné cd platí, že číslice A taková, že součet $A + c + d$ je dělitelný devíti, je určena jednoznačně. Navíc tento součet může být nejvýše $9 + 8 + 8 = 25$, takže aby byl dělitelný devíti, musí být buď 9, nebo 18.

Budeme tedy postupně vypisovat všechny dvojmístné násobky čtyř cd, které jsou menší než 90; pro každé z těchto čísel určíme číslo $AB = A0$ tak, aby součet $A + c + d$ byl 9 nebo 18; zkontrolujeme, zda je číslo cd menší než AB:

cd	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88
AB	60	20	70	30	80	40	90	50	10	60	20	70	30	80	40	90	50	10	60	20
$cd<AB$	a	a	a	a	a	a	a	a	n	a	n	a	n	a	n	a	n	n	n	n

Matěj mohl vyrobit nejvýše 12 různých dvojic kartiček.

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Písmenkový Logik je hra pro dva hráče, která má následující pravidla:

1. První hráč si myslí pětipísmenné slovo, v němž se žádné písmeno neopakuje.
2. Druhý hráč napíše nějaké pětipísmenné slovo.
3. První hráč odpoví dvěma čísly — první číslo udává, kolik písmen napsaného slova se shoduje s myšleným slovem, tzn. stojí také na správném místě; druhé číslo udává, kolik písmen napsaného slova je obsaženo v myšleném slově, ale nestojí na správném místě.
4. Kroky 2 a 3 se opakují, dokud druhý hráč myšlené slovo neuhodne.

Záznam jedné hry dvou kamarádů vypadal následovně:

SONET	1	2
MUDRC	0	2
PLAST	0	2
KMOTR	0	4
ATOLY	1	1
DOGMA	0	2

V následujícím tahu bylo myšlené slovo uhodnuto. Určete, které slovo to bylo.

(*M. Volfová*)

Nápověda. Nejprve určete, která písmena se v hledaném slově vyskytují, resp. nevyskytují.

Možné řešení. Nejprve určíme, která písmena se v myšleném slově vyskytují, poté rozhodneme, na kterých místech.

Ze záznamu hry vidíme, že ve slově SONET se vyskytují tři a ve slově MUDRC dvě hledaná písmena. Vzhledem k tomu, že tato dvě slova nemají žádné písmeno společné, hledaná pětice písmen se nachází pouze mezi písmeny

S, O, N, E, T, M, U, D, R, C.

Proto dvě z hledaných písmen, která jsou současně ve slově PLAST, jsou právě písmena S a T. Ze stejného důvodu jsou čtyři z hledaných písmen, která jsou současně ve slově KMOTR, právě písmena M, O, T a R. Hledaná pětice písmen je

S, M, O, T, R.

Všechna ostatní písmena v uvedeném záznamu hry odstraníme a budeme uvažovat o pořadí písmen v hledaném slově.

SO_ _T	1	2
M_ _R_	0	2
_ _ _ST	0	2
_MOTR	0	4
_TO_ _	1	1
_O_M_	0	2

Na pátém řádku jsou pouze dvě písmena, z nichž jedno je na správném místě. Písmeno O to být nemůže, protože na stejném místě se vyskytuje i na řádku předchozím, kde však na správném místě není žádné z napsaných písmen. Proto je na správném místě písmeno T a můžeme začít doplňovat hledané slovo:

_T_ _ _.

Jedno z písmen na prvním řádku je také na správném místě. Písmeno O to být nemůže, protože druhé místo je už obsazeno. Písmeno T to také být nemůže, protože na stejném místě se vyskytuje také na třetím řádku, kde na správném místě není žádné z písmen. Proto musí být na správném místě písmeno S:

ST_ _ _.

Z druhého a čtvrtého řádku víme, že písmeno R nemůže být na čtvrtém ani na pátém místě. První dvě místa jsou již obsazená, proto R musí být na třetím místě:

STR_ _.

Z posledního řádku víme, že písmeno M nemůže být na čtvrtém místě. První tři místa jsou obsazená, proto je M na pátém místě a na O zbývá místo čtvrté. Hledané slovo je

STROM.

Z8–I–2

Součet všech dělitelů jistého lichého čísla je 78. Určete, jaký je součet všech dělitelů dvojnásobku tohoto neznámého čísla. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Jak se liší všichni dělitelé původního čísla a jeho dvojnásobku?

Možné řešení. Neznámé číslo označíme N. Libovolný dělitel čísla $2N$ je tvaru $c \cdot d$, kde c je nějaký dělitel čísla 2 a d je nějaký dělitel čísla N. Jediní dělitelé čísla 2 jsou 1 a 2, dělitelé čísla N jsou 1, N, příp. ještě nějaká další čísla

$$d_1, d_2, \ldots, d_k,$$

o nichž předpokládáme, že jsou navzájem různá. Dělitelé čísla $2N$ tedy patří do množiny

$$\{1, d_1, d_2, \ldots, d_k, N, 2, 2d_1, 2d_2, \ldots, 2d_k, 2N\} \tag{1}$$

a podmínka ze zadání znamená

$$1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_k + N = 78.$$

Protože číslo N je liché, musí být liší také všichni jeho dělitelé $1, d_1, d_2, \ldots, d_k, N$. Naopak všechna čísla $2, 2d_1, 2d_2, \ldots, 2d_k, 2N$ jsou sudá, tudíž prvky množiny (1) jsou navzájem různá čísla. Součet všech dělitelů čísla $2N$ je proto roven

$$1 + d_1 + \ldots + d_k + N + 2 + 2d_1 + \ldots + 2d_k + 2N = 3 \cdot (1 + d_1 + \ldots + d_k + N) = 3 \cdot 78 = 234.$$

Jiné řešení. Každé číslo je dělitelné sebou samým a číslem 1. Proto neznámé číslo, které má součet všech svých dělitelů roven 78, musí být menší než 78. Vyzkoušením všech lichých čísel od 1 do 77 zjistíme, že tuto vlastnost má pouze číslo 45. Dvojnásobkem je číslo 90 a jeho dělitelé jsou:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 15,\ 18,\ 30,\ 45,\ 90.$$

Součet těchto dělitelů je 234.

Z8–I–3

V lichoběžníku $KLMN$ platí, že

- strany KL a MN jsou rovnoběžné,
- úsečky KL a KM jsou shodné,
- úsečky KN, NM a ML jsou navzájem shodné.

Určete velikost úhlu KNM. *(L. Hozová)*

Nápověda. Jaký je součet velikostí úhlů KNM a KLM?

Možné řešení. Ze zadání plyne, že lichoběžník $KLMN$ je rovnoramenný a navíc je úhlopříčkou KM rozdělen na dva rovnoramenné trojúhelníky. Součet velikostí vnitřních úhlů v každém z těchto trojúhelníků je roven 180°; součet velikostí vnitřních úhlů v daném lichoběžníku je roven $2 \cdot 180° = 360°$. Velikost hledaného úhlu KNM označíme α. Pomocí neznámé α budeme vyjadřovat velikosti ostatních úhlů v lichoběžníku, dokud nebudeme schopni tuto neznámou určit.

Protože lichoběžník $KLMN$ je rovnoramenný, jsou vnitřní úhly u vrcholů N a M, resp. K a L shodné, tj.

$$\alpha = |\sphericalangle KNM| = |\sphericalangle LMN|, \quad \text{resp.} \quad |\sphericalangle LKN| = |\sphericalangle KLM|.$$

Součet velikostí všech těchto úhlů je 360°, proto je součet kterýchkoli dvou neshodných úhlů roven 180°, tedy

$$|\sphericalangle LKN| = |\sphericalangle KLM| = 180° - \alpha.$$

Protože trojúhelník KLM je rovnoramenný, jsou vnitřní úhly u základny shodné, tzn.

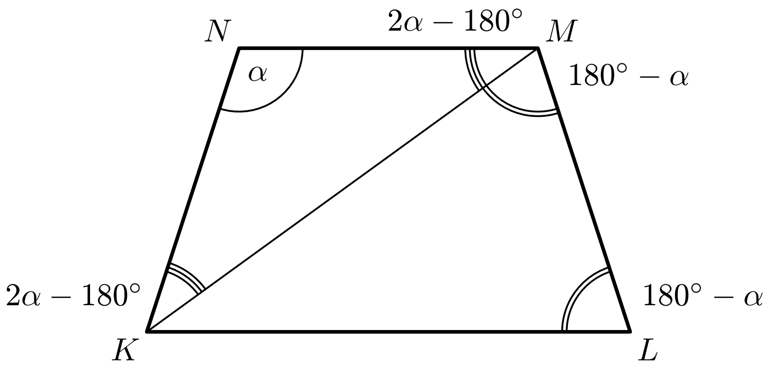
$$|\sphericalangle KML| = |\sphericalangle KLM| = 180° - \alpha.$$

Úhel KMN je rozdílem úhlů LMN a KML, platí tedy

$$|\sphericalangle KMN| = \alpha - (180^\circ - \alpha) = 2\alpha - 180^\circ.$$

Protože trojúhelník KMN je rovnoramenný, jsou vnitřní úhly u základny shodné, tedy

$$|\sphericalangle MKN| = |\sphericalangle KMN| = 2\alpha - 180^\circ.$$



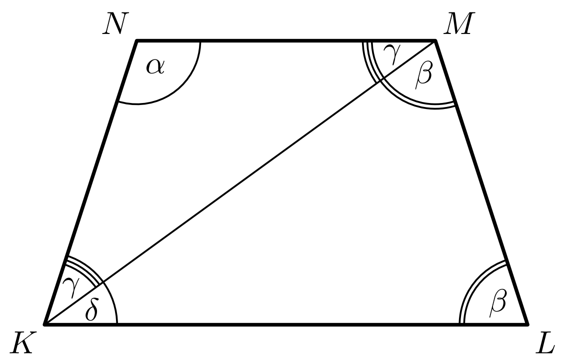
Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku KMN je 180°, dostáváme tak rovnici s neznámou α, kterou dořešíme:

$$\begin{aligned} 5\alpha - 360^\circ &= 180^\circ, \\ 5\alpha &= 540^\circ, \\ \alpha &= 108^\circ. \end{aligned}$$

Velikost úhlu KNM je 108°.

Poznámka. Při značení jako na následujícím obrázku můžeme všechny výše uvedené podmínky zformulovat takto:

$$\alpha + 2\gamma = \delta + 2\beta = 180^\circ, \quad \beta + \gamma = \alpha, \quad \gamma + \delta = \beta.$$



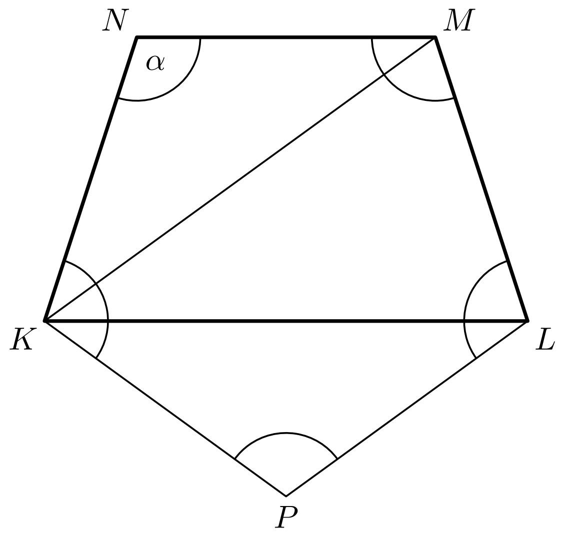
S těmito podmínkami lze pracovat velmi různorodě a někdy může být výhodné vyjádřit velikosti některých dalších úhlů. Pro kontrolu uvádíme velikosti všech vyznačených úhlů:

$$\alpha = 108^\circ, \quad \beta = 72^\circ, \quad \gamma = \delta = 36^\circ.$$

Jiné řešení. Lichoběžník $KLMN$ lze doplnit do pětiúhelníku $KPLMN$ tak, aby

$$|LP| = |PK| = |KN| = |NM| = |ML|.$$

Ze zadání plyne, že pětiúhelník $KPLMN$ je pravidelný. (Protože $|KL| = |KM|$, jsou trojúhelníky LPK a KNM shodné. Lichoběžníky $KLMN$ a $KMLP$ jsou tedy také shodné, a proto jsou všechny vnitřní úhly v pětiúhelníku $KPLMN$ stejné.)



Úhlopříčky KM a KL dělí tento pětiúhelník na tři trojúhelníky. Součet velikostí vnitřních úhlů v každém z těchto trojúhelníků je roven $180°$; součet velikostí vnitřních úhlů v pětiúhelníku $KPLMN$ je roven $3 \cdot 180° = 540°$. Protože jsou všechny vnitřní úhly shodné, má každý z nich velikost

$$\frac{540°}{5} = 108°.$$

Velikost úhlu KNM je $108°$.

Poznámka. Obě uvedená řešení byla založena na větě o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku. Odtud jsme určili součet vnitřních úhlů ve specifickém čtyřúhelníku, resp. pětiúhelníku. Obecně platí, že součet velikostí vnitřních úhlů v libovolném n-úhelníku je roven $(n-2) \cdot 180°$.

Z8–I–4

Adam má plnou krabici kuliček, které jsou velké nebo malé, černé nebo bílé. Poměr velkých a malých kuliček je 5 : 3. Mezi velkými kuličkami je poměr černých a bílých kuliček 1 : 2, mezi malými kuličkami je poměr černých a bílých 1 : 8.

Jaký je poměr všech černých a všech bílých kuliček? (*M. Petrová*)

Nápověda. Nejprve určete poměr velkých černých a malých černých kuliček.

Možné řešení. Poměr počtu velkých černých a velkých bílých kuliček je 1 : 2. To znamená, že mezi velkými kuličkami tvoří 1 díl černé a 2 díly bílé kuličky. Zejména počet všech velkých kuliček je násobkem 3.

Poměr počtu malých černých a malých bílých kuliček je $1 : 8$. To znamená, že mezi malými kuličkami tvoří 1 díl černé a 8 dílů bílé kuličky; počet všech malých kuliček je tedy násobkem 9.

Kdyby byly díly, kterými jsme poměřovali barevné kuličky mezi velkými a malými, stejné, byl by poměr všech velkých a všech malých kuliček roven $3 : 9 = 1 : 3$. Aby byl tento poměr $5 : 3$, musí být jeden díl, který jsme používali pro velké kuličky, pětkrát větší než díl, který jsme používali pro malé kuličky. Jinými slovy, velkých černých kuliček musí být pětkrát víc než malých černých kuliček.

Vzhledem k počtu malých černých kuliček (1 díl) jsou všechny ostatní počty vyjádřeny v následující tabulce:

kuličky	velké	malé	celkem
černé	5 dílů	1 díl	6 dílů
bílé	10 dílů	8 dílů	18 dílů
celkem	15 dílů	9 dílů	

Poměr všech černých a všech bílých kuliček je tedy roven

$$6 : 18 = 1 : 3.$$

Poznámka. Každý poměr můžeme podle potřeby rozšířit. Pro libovolná přirozená čísla a, b, c např. platí

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{2a}, \quad \frac{1}{8} = \frac{b}{8b}, \quad \frac{5}{3} = \frac{5c}{3c}.$$

Čísla a, b, c představují právě díly, pomocí nichž jsme poměřovali jednotlivé typy kuliček v předchozím řešení:

kuličky	velké	malé	celkem
černé	a	b	$a + b$
bílé	$2a$	$8b$	$2a + 8b$
celkem	$5c$	$3c$	

V tomto duchu můžeme uvedené řešení formulovat tak, že hledáme čísla a, b, c, aby platilo

$$3a = 5c, \quad 9b = 3c.$$

Odtud vidíme, že c musí být nutně násobkem tří, neboli $c = 3d$ (kde d je jakékoli přirozené číslo). Zbylá dvě čísla jsou potom rovna

$$a = 5d, \quad b = d.$$

Po doplnění do tabulky dostáváme tentýž závěr jako výše.

Z8–I–5

Průměr známek, které měli na vysvědčení žáci 8.A z matematiky, je přesně 2,45. Pokud bychom nepočítali jedničku a trojku sourozenců Michala a Aleny, kteří do třídy přišli před měsícem, byl by průměr přesně 2,5.

Určete, kolik žáků má 8.A. (*M. Dillingerová*)

Nápověda. Vyjádřete informace ze zadání pomocí počtu žáků ve třídě a součtu jejich známek z matematiky.

Možné řešení. Průměrnou známku si můžeme představit tak, že každý žák získal právě tuto známku (i když známka 2,45 nebo 2,5 se samozřejmě nedává). Počet všech dětí v 8.A si označíme n. Odtud dostáváme, že součet všech známek je jednak $2{,}45n$, jednak $1 + 3 + 2{,}5(n - 2)$. Řešíme tak rovnici:

$$\begin{aligned} 2{,}45n &= 4 + 2{,}5n - 5, \\ 0{,}05n &= 1, \\ n &= 20. \end{aligned}$$

Třída 8.A má 20 žáků.

Poznámka. Pokud součet všech známek označíme z, potom podle zadání platí

$$\frac{z}{n} = 2{,}45 \quad \text{a} \quad \frac{z-4}{n-2} = 2{,}5,$$

neboli

$$z = 2{,}45n \quad \text{a} \quad z = 2{,}5(n-2) + 4.$$

Porovnáním dvojího vyjádření téhož čísla z dostaneme rovnici jako výše.

Z8–I–6

Šemík dostal od svého pána kvádr složený z navzájem shodných kostek cukru, kterých bylo nejméně 1 000 a nejvýše 2 000. Šemík kostky cukru ujídal po jednotlivých vrstvách — první den ujedl jednu vrstvu zepředu, druhý den jednu vrstvu zprava a třetí den jednu vrstvu shora. Přitom v těchto třech vrstvách byl pokaždé stejný počet kostek.

Zjistěte, kolik kostek mohl mít darovaný kvádr. Určete všechny možnosti.

(*E. Novotná*)

Nápověda. Vyjádřete počty postupně snědených kostek vzhledem k rozměrům darovaného kvádru.

Možné řešení. Rozměry kvádru (v kostkách cukru) označíme x, y a z tak, aby přední stěna měla rozměry $x \times z$, boční stěna $y \times z$ a horní stěna $x \times y$.

- První den Šemík ujedl jednu vrstvu zepředu, snědl tedy $x \cdot z$ kostek a rozměry kvádru poté byly $x \times (y - 1) \times z$.
- Druhý den ujedl jednu vrstvu zprava, snědl tak $(y - 1) \cdot z$ kostek a rozměry kvádru se zmenšily na $(x - 1) \times (y - 1) \times z$.
- Třetí den ujedl jednu vrstvu shora, snědl $(x - 1) \cdot (y - 1)$ kostek.

Každý den Šemík snědl stejný počet kostek, platí tedy

$$x \cdot z = (y-1) \cdot z = (x-1) \cdot (y-1).$$

Protože x, y, z jsou přirozená čísla (zejména $z \neq 0$), z první rovnosti dostáváme

$$x = y - 1.$$

Odtud vidíme, že $y - 1 \neq 0$, tudíž z druhé rovnosti dostáváme

$$z = x - 1 = y - 2.$$

Rozměry původního kvádru tedy byly $(y-1) \times y \times (y-2)$ a podle zadání má platit

$$1\,000 \leqq (y-1) \cdot y \cdot (y-2) \leqq 2\,000.$$

Postupným zkoušením se rychle přesvědčíme, že jediná řešení vyhovující těmto dvěma nerovnostem odpovídají buď $y = 12$, nebo $y = 13$. Darovaný kvádr mohl mít následující počet kostek:

$$11 \cdot 12 \cdot 10 = 1\,320 \quad \text{nebo} \quad 12 \cdot 13 \cdot 11 = 1\,716.$$

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Milena nasbírala do košíku poslední spadlé ořechy a zavolala na partu kluků, ať se o ně podělí. Dala si ale podmínku: první si vezme 1 ořech a desetinu zbytku, druhý si vezme 2 ořechy a desetinu nového zbytku, třetí si vezme 3 ořechy a desetinu dalšího zbytku a tak dále. Takto se podařilo rozebrat všechny ořechy a přitom každý dostal stejně.

Určete, kolik Milena nasbírala ořechů a kolik se o ně dělilo chlapců. (*M. Volfová*)

Nápověda. Uvažujte od konce: kolik si vzal poslední chlapec a kolik předposlední?

Možné řešení. Pořadové číslo posledního chlapce označme n. Tento chlapec si vzal n ořechů a desetinu vzniklého zbytku a pak už nic nezůstalo. Nulový tedy musel být už zbytek po odebrání n ořechů.

Předposlední chlapec, s pořadovým číslem $n-1$, si vzal $n-1$ ořechů a desetinu vzniklého zbytku. Aby měl také n ořechů jako poslední chlapec, musí být tato desetina zbytku rovna právě 1 ořechu. Zmíněný zbytek je tedy 10 ořechů.

Na posledního n-tého chlapce zbylo z těchto 10 ořechů 9, neznámá n je tedy 9. Chlapců bylo 9 a každý si vzal stejně jako poslední z nich, tj. 9 ořechů. Celkový počet ořechů byl $9 \cdot 9 = 81$. Pro kontrolu uvádíme, jak si chlapci ořechy postupně rozebírali:

- 1. chlapec: $1 + (81 - 1) : 10 = 1 + 8 = 9$, zbyde 72,
- 2. chlapec: $2 + (72 - 2) : 10 = 2 + 7 = 9$, zbyde 63,
- 3. chlapec: $3 + (63 - 3) : 10 = 3 + 6 = 9$, zbyde 54,
- atd.,
- 8. chlapec: $8 + (18 - 8) : 10 = 8 + 1 = 9$, zbyde 9,
- 9. chlapec: 9.

Milena nasbírala 81 ořechů, o které se dělilo 9 chlapců.

Jiná nápověda. Uvažujte od začátku: kolik mohlo, příp. nemohlo být na začátku ořechů?

Jiné řešení. První chlapec si vzal 1 ořech a desetinu zbytku, což znamená, že celkový počet ořechů byl

$$10x + 1,$$

kde x je neznámé přirozené číslo. Při tomto značení si první chlapec vzal $1 + x$ ořechů a nový zbytek byl $10x + 1 - 1 - x = 9x$.

Druhý chlapec si vzal 2 ořechy a desetinu nového zbytku, což znamená, že tento zbytek byl

$$9x = 10y + 2, \tag{1}$$

kde y je neznámé přirozené číslo. Při tomto značení si druhý chlapec vzal $2 + y$ ořechů, nový zbytek byl $10y + 2 - 2 - y = 9y$ atd.

Protože si první a druhý chlapec odebrali stejný počet ořechů, platí

$$1 + x = 2 + y \quad \text{neboli} \quad y = x - 1.$$

Dosazením do rovnice (1) a jednoduchou úpravou získáme x:

$$9x = 10x - 10 + 2,$$
$$x = 8.$$

Celkový počet ořechů byl $80 + 1 = 81$ a každý chlapec si vzal $1 + 8 = 9$ ořechů. Kontrolu u všech chlapců provedeme stejně jako v předchozí části.

Z9–I–2

Lenka se bavila tím, že vyťukávala na kalkulačce čísla, přičemž používala pouze číslice od 2 do 9. Zápisy některých čísel měly tu vlastnost, že jejich obraz v osové nebo středové souměrnosti byl opět zápisem nějakého čísla.

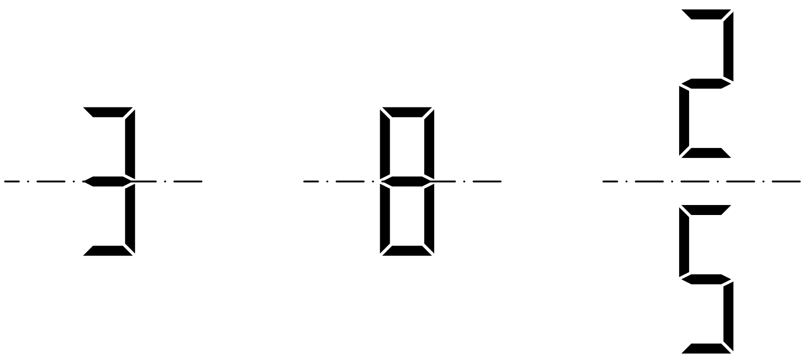
Určete počet všech nejvýše trojmístných čísel s uvedenými vlastnostmi.

(*L. Dedková*)

Nápověda. Rozdělte vyhovující čísla do skupin podle typu uvažované souměrnosti.

Možné řešení. Čísla vyhovující podmínkám ze zadání rozdělíme do tří skupin podle toho, zda uvažujeme souměrnost podle vodorovné osy, souměrnost podle svislé osy nebo souměrnost středovou.

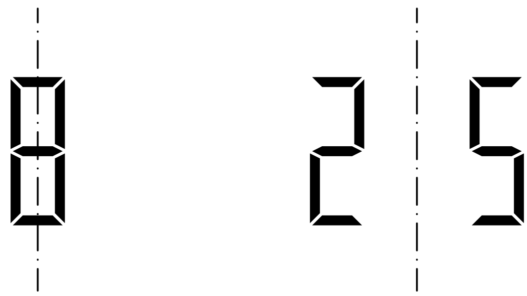
1) Jediné číslice, které jsou souměrné podle vodorovné osy nebo jejichž obraz vzhledem k takové souměrnosti je rovněž číslicí, jsou číslice 3, 8, 2 a 5:



Určíme, kolik je všech nejvýše trojmístných čísel sestavených výhradně z těchto číslic: Jednomístná čísla jsou 4. Dvojmístných čísel je $4 \cdot 4 = 16$ (před každou z číslic 2, 3, 5, 8 můžeme připsat jakoukoli z těchto čtyř číslic). Trojmístných čísel je $4 \cdot 16 = 64$ (před každé dvojmístné číslo, kterých jsme napočítali 16, lze připsat libovolnou z uvažovaných čtyř číslic). Celkový počet čísel v této skupině je

$$4 + 16 + 64 = 84.$$

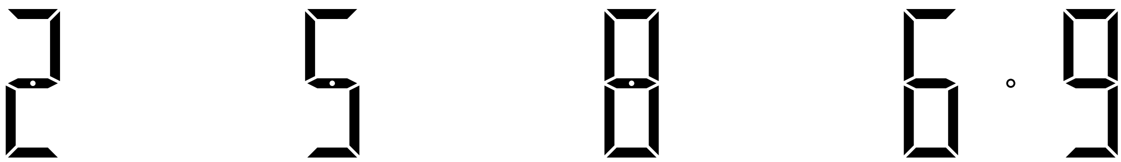
2) Jediné číslice, které jsou souměrné podle svislé osy nebo jejichž obraz vzhledem k takové souměrnosti je rovněž číslicí, jsou číslice 8, 2 a 5:



Počet všech nejvýše trojmístných čísel sestavených výhradně z těchto číslic určíme podobně jako v předchozí části — nejprve počet jednomístných čísel, poté dvojmístných a nakonec trojmístných:

$$3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3 + 9 + 27 = 39.$$

3) Jediné číslice, které jsou středově souměrné nebo jejichž obraz vzhledem k takové souměrnosti je rovněž číslicí, jsou číslice 2, 5, 8, 6 a 9:



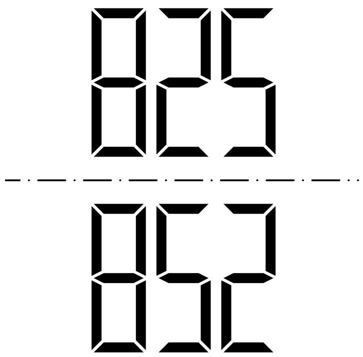
Celkový počet čísel v této skupině určíme stejně jako výše:

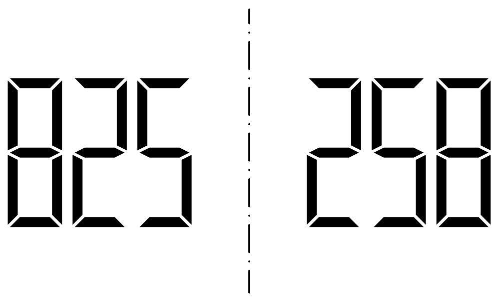
$$5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5 + 25 + 125 = 155.$$

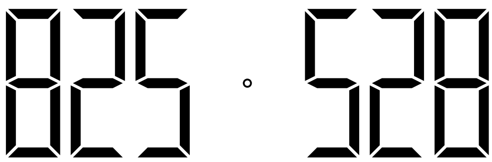
Všechna čísla ze skupiny 2) jsou zahrnuta jak ve skupině 1), tak ve skupině 3). Kromě těchto čísel nemají tyto tři skupiny žádné další společné prvky. Celkový počet čísel vyhovujících zadání tedy dostaneme tak, že k počtu čísel ze skupiny 1) přičteme počet čísel skupiny 3) zmenšený o počet čísel skupiny 2):

$$84 + 155 - 39 = 200.$$

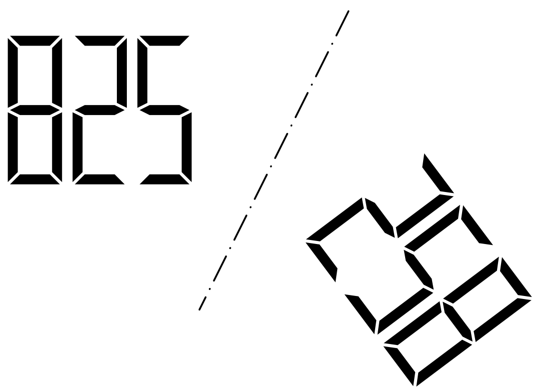
Poznámky. Pro příklad uvádíme možné obrazy čísla 825, jež patří do všech diskutovaných skupin:

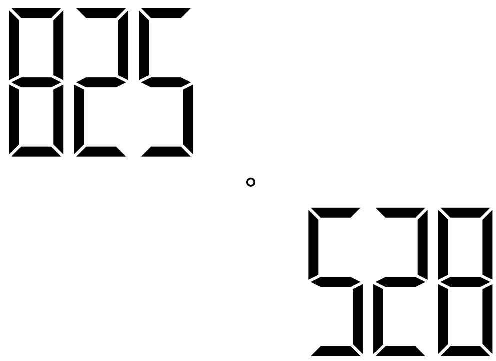






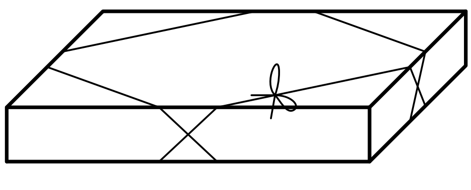
Pokud bychom uvažovali souměrnosti vzhledem k obecným osám, resp. středům, budou výsledné obrazy pouze pootočením, resp. posunutím některých obrazů uvažovaných výše. Na počet čísel vyhovujících zadání nemá tento obecnější předpoklad žádný vliv.





Z9–I–3

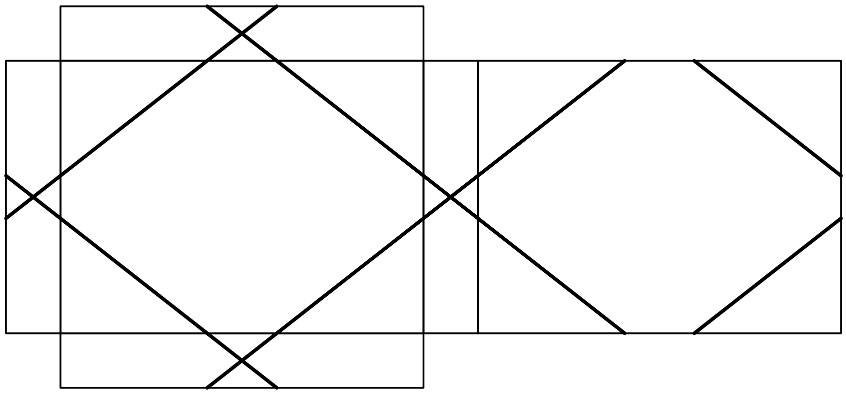
Dárek je zabalen do krabice, jejíž rozměry v cm jsou $40 \times 30 \times 6$. Krabice je převázána provázkem jako na obrázku. Určete, kolik nejméně cm provázku je potřeba na převázání krabice, pokud na uzel a mašli stačí 20 cm. (*M. Krejčová*)



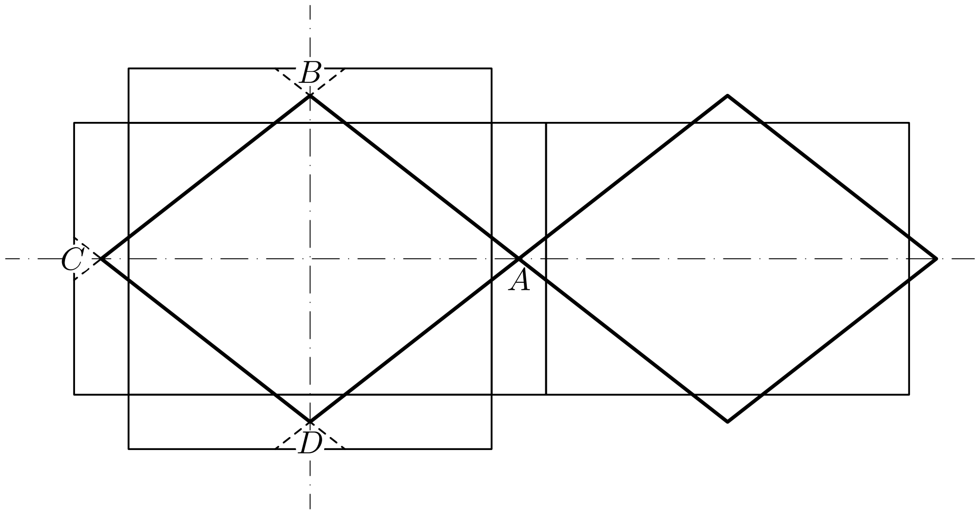
Nápověda. Rozložte krabici do roviny.

Možné řešení. Provázek vždy obepíná krabici tak, aby měl co nejmenší možnou délku. Proto po rozložení krabice do roviny tvoří stopy po provázku části přímek. Dále si uvědomme, že krabice je převázána jedním kusem provázku, a proto musí být alespoň v jednom bodě křížení provázek přetočen, aby změnil směr.

1) Nejprve předpokládejme, že všechny body křížení jsou ve středech bočních stěn. V takovém případě může rozložená krabice s vyznačenými stopami po provázku vypadat takto:



Stopy v navzájem shodných stěnách jsou navzájem shodné, navíc stopy v jednotlivých stěnách sestávají z navzájem shodných úseček. Proto si můžeme jejich měření usnadnit vhodným přemístěním jejich částí. Součet délek silně vyznačených úseček na předchozím obrázku je stejný jako na obrázku následujícím:



Tento útvar je složen z osmi shodných úseček, jejichž součet délek je roven

$$8 \cdot |AB|.$$

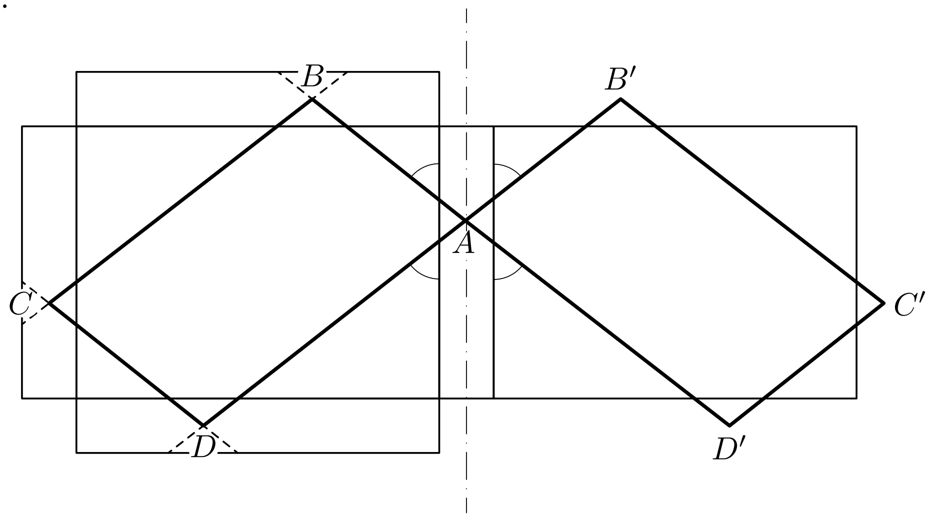
Úsečka AB je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami délek $20 + 3 = 23\,(\mathrm{cm})$ a $15 + 3 = 18\,(\mathrm{cm})$. Podle Pythagorovy věty platí

$$|AB| = \sqrt{23^2 + 18^2} = \sqrt{853} \doteq 29{,}2\,(\mathrm{cm}).$$

Na převázání krabice tímto způsobem tedy postačí provázek o délce

$$8 \cdot \sqrt{853} + 20 \doteq 253{,}6\,(\mathrm{cm}).$$

2) Nyní předpokládejme, že body křížení provázku nejsou ve středech bočních stěn, avšak jsou nadále stejně daleko od horní i dolní stěny. V tomto případě nejsou stopy po provázku tak souměrné jako výše, nadále však platí, že tyto stopy v horní a dolní stěně jsou stejné (přesněji řečeno, v průmětu kolmém k těmto stěnám stopy po provázku splývají). Po rozložení krabice do roviny a případném přemístění může měřený útvar vypadat např. takto:



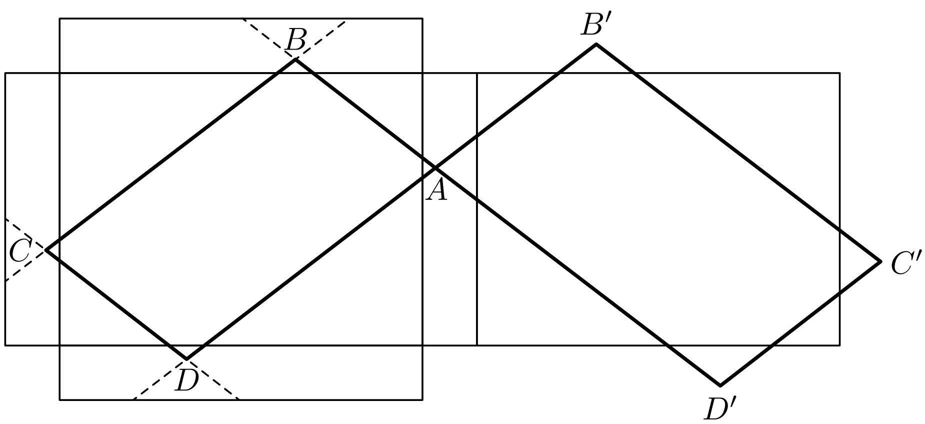
Z uvedeného plyne, že čtyřúhelníky $ABCD$ a $AB'C'D'$ jsou osově souměrné, a proto jsou vyznačené úhly poblíž vrcholu A shodné. Ze stejného důvodu jsou shodné také odpovídající úhly poblíž každého dalšího vrcholu. Odtud zejména vyplývá, že čtyřúhelníky $ABCD$ a $AB'C'D'$ jsou rovnoběžníky, jejichž strany jsou rovnoběžné s úhlopříčkami obdélníků, které představují horní a dolní stěnu krabice.

Vyznačený útvar tedy sestává ze dvou čtveřic navzájem shodných úseček, jejichž součet délek je roven

$$4 \cdot (|BA| + |AD|) = 4 \cdot (|BA| + |AD'|) = 4 \cdot |BD'|.$$

Úsečka BD' je však shodná s analogickou úsečkou na obrázku v předchozím případě. Její délka je tedy stejná a délka provázku potřebného k převázání krabice se nezmění.

3) V obecném případě neplatí, že stopy po provázku v horní a dolní stěně jsou stejné. Nadále však platí, že tyto stopy jsou rovnoběžné s úhlopříčkami horní a dolní stěny. Po rozložení krabice do roviny a případném přemístění může měřený útvar vypadat následovně:



V tomto případě rovnoběžníky $ABCD$ a $AB'C'D'$ nejsou shodné. Vyznačený útvar sestává ze čtyř dvojic navzájem shodných úseček, jejichž součet délek je roven

$$2 \cdot (|BA| + |AD| + |B'A| + |AD'|) = 2 \cdot (|BD'| + |DB'|).$$

Jak úsečka BD', tak úsečka DB' jsou však shodné s analogickými úsečkami na obrázcích v předchozích případech. Jejich délky jsou tedy stejné a délka provázku potřebného k převázání krabice se ani v tomto případě nezmění.

Poznámka. Provázek na obrázku v zadání úlohy je znázorněn přibližně jako v případě 1). Tento předpoklad však není v textu přímo zmíněn, proto by se s ním pracovat nemělo. Řešení zabývající se pouze tímto případem hodnoťte nejlépe stupněm „dobře“.

Z9–I–4

Petr, Martin a Jirka se trefovali do zvláštního terče, který měl pouze tři pole s hodnotami 12, 18 a 30 bodů. Všichni chlapci házeli stejným počtem šipek, všechny šipky se trefily do terče a výsledky každých dvou chlapců se lišily v jediném hodu. Petrův průměrný bodový výsledek byl o dva body lepší než Martinův a ten byl o jeden bod lepší než průměr Jirkův.

Určete, kolika šipkami házel každý z chlapců. (*E. Novotná*)

Nápověda. Určete, jak se lišily celkové bodové výsledky některých dvou chlapců.

Možné řešení. Nejlepší výsledek měl Petr, střední Martin a nejhorší Jirka. Výsledky každých dvou chlapců se lišily v jediném hodu, proto musel Petr v tomto hodu trefit pole s hodnotou 30, Martin pole s hodnotou 18 a Jirka 12. Odtud vidíme, že Petrův celkový výsledek byl o 12 bodů větší než celkový součet Martinův a ten byl o 6 bodů větší než součet Jirkův.

Současně ze zadání víme, že Petrův průměrný výsledek byl o 2 body lepší než Martinův a ten byl o 1 bod lepší než průměr Jirkův. Odtud vyplývá, že každý z chlapců házel 6krát ($12 : 6 = 2$, resp. $6 : 6 = 1$).

Poznámka. Hledaný počet hodů označíme n a celkový bodový výsledek Jirky, Martina a Petra označíme postupně J, M a P. Při tomto značení lze předchozí řešení zapsat následovně:

$$P = M + 12, \quad \text{resp.} \quad M = J + 6,$$
$$\frac{P}{n} = \frac{M}{n} + 2, \quad \text{resp.} \quad \frac{M}{n} = \frac{J}{n} + 1.$$

Odtud vyplývá, že $12 : n = 2$, resp. $6 : n = 1$, a tedy $n = 6$.

Z9–I–5

Jarek si koupil nové kalhoty, ale nohavice byly příliš dlouhé. Jejich délka byla vzhledem k Jarkově výšce v poměru $5 : 8$. Maminka mu nohavice zkrátila o 4 cm, čímž se původní poměr zmenšil o 4 %. Určete, jak je Jarek vysoký. (*L. Hozová*)

Nápověda. Určete poměr délky zkrácených nohavic vzhledem k Jarkově výšce.

Možné řešení. Původní poměr délky nohavic a výšky Jarka se po zkrácení nohavic zmenšil z $5 : 8$ na

$$\frac{5}{8} - \frac{4}{100} \cdot \frac{5}{8} = \frac{96}{100} \cdot \frac{5}{8} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Výšku Jarka a délku nohavic (v cm) označíme postupně j a n. Podle zadání tedy platí

$$\frac{n}{j} = \frac{5}{8} \quad \text{a} \quad \frac{n-4}{j} = \frac{3}{5}. \tag{1}$$

Z každé rovnice můžeme vyjádřit neznámou n:

$$n = \frac{5}{8}j \quad \text{a} \quad n = \frac{3}{5}j + 4.$$

Odtud sestavíme novou rovnici s neznámou j, kterou dořešíme:

$$\begin{aligned} \frac{5}{8}j &= \frac{3}{5}j + 4, \\ 25j &= 24j + 160, \\ j &= 160. \end{aligned}$$

Jarek je vysoký 160 cm.

Poznámka. Rovnice v (1) tvoří soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, která je ekvivalentní se soustavou

$$\begin{aligned} 8n - 5j &= 0, \\ 5n - 3j &= 20. \end{aligned}$$

Z9–I–6

Neznámé číslo je dělitelné právě třemi různými prvočísly. Když tato prvočísla srovnáme vzestupně, platí následující:

- Rozdíl druhého a prvního prvočísla je polovinou rozdílu třetího a druhého prvočísla.
- Součin rozdílu druhého a prvního prvočísla s rozdílem třetího a druhého prvočísla je násobkem 17.

Určete nejmenší číslo, které má všechny výše uvedené vlastnosti. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Vyjádřete součin ze druhé podmínky pomocí dvou nejmenších prvočísel.

Možné řešení. Zmiňovaná prvočísla označíme vzestupně a, b, c. Ze zadání víme, že $b - a = \frac{1}{2}(c - b)$ neboli

$$c - b = 2(b - a) \tag{1}$$

a že číslo $(b - a)(c - b)$ je násobkem 17. Odtud plyne, že číslo

$$2(b - a)^2 \tag{2}$$

je násobkem 17. Protože 17 není násobkem 2, je tato podmínka splněna právě tehdy, když rozdíl $b - a$ je násobkem 17.

Aby neznámé číslo bylo nejmenší možné, musí být i prvočísla a, b, c nejmenší možná. Nejmenší prvočíslo je 2. Pokud by bylo $a = 2$, potom nejmenší prvočíslo b, pro které je rozdíl $b - a$ násobkem 17, by bylo $b = 19$. Číslo c je pak jednoznačně určeno rovností (1):

$$c = 2 \cdot 17 + 19 = 53,$$

a to je také prvočíslo. Tedy nejmenší číslo s výše uvedenými vlastnostmi je

$$2 \cdot 19 \cdot 53 = 2\,014.$$